

二次元電磁場解析のための有限要素・エレメントフリーガラーキン混合解析法の開発

Hybrid Element Free Galerkin-Finite Element Method for 2D Electromagnetic Field Analysis

宮本 尚樹	(広島大学大学院)	Cingoski Vlatko	(広島大学)
金田 和文	(広島大学)	山下 英生	(広島大学)
Naoki MIYAMOTO	Non-Member		
Vlatko CINGOSKI	Member		
Kazufumi KANEDA	Non-Member		
Hideo YAMASHITA	Member		

In this paper, a new hybrid computational procedure utilizing the element free Galerkin method (EFGM) and the finite element method (FEM) for electromagnetic field analysis is proposed. It is well known that for problems which include moving objects or objects which change their shape, such as in shape optimization, the FEM is not the best solution. For such problem the FEM always requires remeshing of a part of the entire analysis domain which is computationally very expensive. We have recently proposed a new computational approach based on the EFGM which requires only nodal and boundary condition data to solve for the unknown field. Although free of mesh generation problems, this EFGM exhibits low accuracy if the nodal disposition is not uniform, and longer computation time than the ordinary FEM. To use the advantageous of both EFG-FE method, we developed a new hybrid method. In this paper, the proposed hybrid method is verified using several examples.

Key Words: Element Free Galerkin Method, FEM, hybrid method, shape optimization, moving objects

1 はじめに

近年、偏微分方程式の近似解法として有限要素法(Finite Element Method:FEM)が様々な分野で用いられており、計算機性能の向上と数値解析技術の進歩により、この FEM を用いた大規模なシミュレーションが可能となってきた。ところが、FEM を用いる場合、解析領域を有限要素に分割する必要があり、解析モデルの複雑化につれ要素分割データの作成作業が重大な問題となってきた。特に、解析領域内の物体を移動させながら、種々の位置における解析を行う必要がある場合や最適設計問題のように物体形状を変化させながら数百～数千回の解析を行う場合、物体の種々の位置、形状に合わせて要素作成を行う必要があり、その労力には計り知れないものがある。

この問題の一解決法として、要素分割データを必要としないメッシュレス解法の研究が、構造解析の分野で盛んに行われている[1]。著者は電磁界解析にメッシュレス解法の1つであるエレメント

フリーガラーキン法(Element Free Galerkin :EFGM)を適用し、その有用性について検討してきた[2]。しかし、十分な精度の解を得るには解析領域全体に亘って節点を規則的に配置する必要があり、また、FEM に比べ計算処理時間も長くなるなどの問題があることが判明した。しかし、メッシュレス法には前述したように要素作成の必要がないという大きな利点がある。したがって、解析対象物体の特定の部分の形状を種々変更しながら多数回の解析を行う必要がある場合や、物体の一部を移動させながら解析を繰り返す必要がある場合には、要素分割の必要のないメッシュレス法が有効である。上述のような多数回の解析が要求されるのは、電磁機器の最適設計問題などにおいても生ずる。したがって、物体が移動したり、物体形状が変化したりする領域のみにメッシュレス法を適用し、その他の領域には FEM を適用する。このようにすることにより、分割データ作成の手間が削減でき、解析処理にかかる全体の時間の短縮も計れる。

本論文では、静磁場問題と渦電流問題の解法に有限要素・エレメントフリーガラキン混合解析法を適用し、その有用性について検討した。

2 有限要素・エレメントフリーガラキン混合解析法

2.1 提案手法の概要

ここで取り扱う磁場解析問題は、前節で述べたように解析領域内の一部の領域において物体が移動したり、物体の形状が変化する場合を対象として、種々の状態の変化に対して多数回の解析を行う場合を想定する。

Fig. 1 に示す Ω を解析領域全体とし、解析者は Ω 内の物体が移動したり、物体形状の変化する小領域を含む矩形の領域 Ω_{EFG} を定義する。 Ω_{EFG} の領域に矩形格子を生成し、その交点に節点を配置する。 Ω_{EFG} の領域の境界上の節点を用いて矩形格子の外側に格子一つ分と同じ大きさの四辺形要素を生成する。

四辺形要素で構成される Ω_{EFG} の周囲のドーナツ状の領域を Ω_{IN} とする。 $\Omega - \Omega_{\text{EFG}} - \Omega_{\text{IN}}$ の領域を Ω_{FEM} とし、領域 Ω_{FEM} に三角形要素を生成する。 Ω_{FEM} の領域は、通常の FEM により定式化を行い、 Ω_{EFG} の領域には EFGM を適用し、 Ω_{IN} の領域には後述するように FEM と EFGM の定式化を混合した方式により場の方程式の離散化を行う。

上述のように Ω_{FEM} 、 Ω_{IN} 、 Ω_{EFG} の各領域を定式化することにより、物体が移動したり、物体形状が変化しても、要素の再分割の必要なしに、多数回の解析を行うことが可能である。

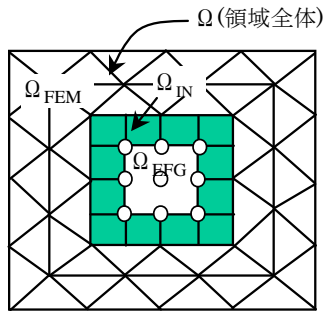


Fig.1 Typical analysis domain with subdomains

2.2 二次元磁場問題の定式化

二次元磁場問題の支配方程式に重みをかけ、部分積分を行い自然境界条件を考慮すると、次式を得る。

$$\int_S \left(v_y \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial A}{\partial x} + v_x \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial A}{\partial y} \right) dS = \int_{S_c} N_i J_0 dS_c$$

$$-\sigma \int_{S_c} N_i \frac{\partial A}{\partial t} dS_c + \frac{\sigma}{S_c} \int_{S_c} N_i \int_{S_c} \frac{\partial A}{\partial t} dS_c dS_c$$

(1)

ここで、 N_i は重み関数、 A_i 節点 i の磁気ベクトルポテンシャル、 v_x 、 v_y は x 、 y 方向の磁気抵抗率 $[m/H]$ 、 J_0 は電流密度 $[A/m^2]$ 、 σ は導電率 $[S/m]$ 、 S は全体の解析領域、 S_c はコイル領域、 S_e は導体領域、 i は $1, 2, \dots, np$ まで変化し、 np は総節点数を表す。

(1)式にそれぞれの領域の近似式を代入することにより連立一次方程式を作成する。ここで、FEM で解く領域の近似式は

$$A_p = \sum_{i=1}^3 N_i^{\text{FE}} A_i$$

(2)

であり、 N_i^{FE} は FEM の補間関数、 A_p は要素 e 内の点 p の磁気ベクトルポテンシャルである。また、EFGM で解く領域の近似式は

$$A_p = \sum_{i=1}^{nn} N_i^{\text{EF}} A_i$$

(3)

であり、 nn は積分点の影響半径内にある節点数、 N_i^{EF} は EFGM の補間関数、 A_p は EFGM で解く領域内の磁気ベクトルポテンシャルである。中間領域においては、

$$A_p = R \sum_{i=1}^{nn} N_i^{\text{EF}} A_i + (1-R) \sum_{k=1}^4 N_{ki}^{\text{FE}} A_{ki}$$

(4)

で示すように、四辺形要素の FEM と EFGM の2つの補間関数を用いる。ここで、 R は重み関数で、FEM で解く領域で 0、EFGM で解く領域で 1 になり、0 から 1 まで変化する双一次補間関数とする。 A_p は中間領域内の磁気ベクトルポテンシャルである。

これら 3 つの近似式を領域ごとに(1)式に代入することにより、連立一次方程式を作成する。

3 提案手法の有用性の検討

2 節で説明した混合解析法を、精度の検討のために二次元静磁場で理論値のあるモデルに適用した。また、物体が移動するモデル、及び渦電流が流れる導体のあるモデルに適用し、それぞれの解析結果について FEM との比較を行った。

3.1 精度の検討

精度の検討のために Fig.2 に示す矩形コイル周囲の磁場の計算に適用し、理論値との比較を行った。また、解析に用いた入力データを Table.1 に示す。

Table.1 Input data of square coil model

手法	混合解析法		FEM
ケース	a	b	-
総節点数	540	660	540
FEM 領域の要素数	894	894	992
EFGM 領域の節点数	49	169	-

混合解析法のケース a は、FEM と総節点数を同じにしている。また、ケース b は EFGM 領域の節点数のみ増加させている。

精度の検討を行うために FEM 及び混合解析法の解析結果と理論値との比較をし、その累積誤差分布を Fig.3 に、計算時間を Table.2 に示す。

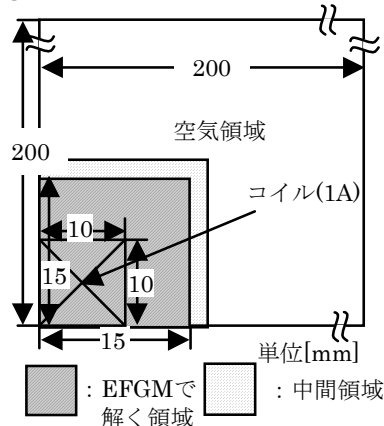


Fig.2 Square coil model

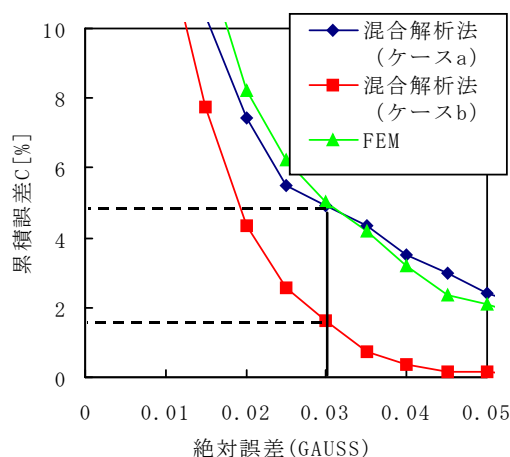


Fig.3 Cumulation error

Table.2 Computation time for square coil model

手法	計算時間(sec)
混合解析法(ケース a)	2.1
混合解析法(ケース b)	3.2
FEM	1.6

累積誤差は次式により求めた。

$$C = \frac{\text{絶対誤差が}\varepsilon\text{以上の値を持つ点数}}{\text{絶対誤差を求める点数}} \times 100$$

(5)

C は累積誤差で、絶対誤差 ε 以上の誤差を持つ面積の割合が全体のどれくらいあるかを示している。絶対誤差を求める点はコイルを含む $50\text{mm} \times 50\text{mm}$ の解析領域に格子状に 2025 点発生させており、中間領域においても十分な数の測定点を発生させている。Fig.3 より、混合解析法のケース a と FEM の場合、絶対誤差 0.03 ガウス以上の面積が、解析領域全体のうち約 5%であり、節点数を増やしたケース b では 2%以下となっていることが判る。これから、混合解析法は節点数が FEM と同じ場合は、FEM と同程度の精度が得られ、節点数を増やすと精度が上がるということが判った。なお、計算時間は FEM と節点数の同じケース a では FEM の 1.2 倍、節点数を増やしたケース b では約 2 倍となっている。

3.2 物体が移動する場合の検討

移動する物体がある場合について、Fig.4 に示すモデルを取り上げる。全解析領域を、通常 FEM で解析した結果と提案する混合解析法により解析した結果の比較を行う。ここで、解析に用いた入力データを Table.3 に示す。

Table.3 Input data of movable coil model

手法	混合解析法	FEM
総節点数	1043	1043
FEM 領域の要素数	1717	1969
EFGM 領域の節点数	117	-

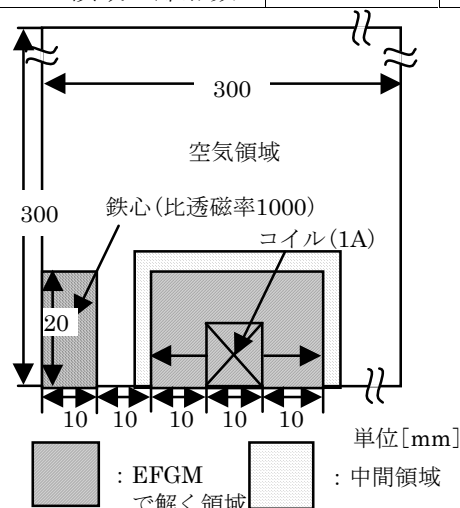


Fig.4 Model with movable coil

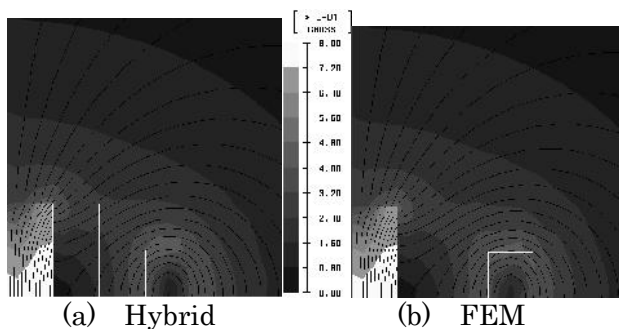


Fig.5 Magnetic flux density distribution and magnetic flux lines

FEM と混合解析法による磁束密度分布と磁束線図を Fig.5 に、計算時間を Table.4 に示す。

Table.4 Computation time for movable coil model

手法	計算時間(sec)
混合解析法	3.9
FEM	2.2

Fig.5 から、混合解析法による結果は FEM による結果とほとんど差がないことが判る。混合解析法の計算時間は FEM の約 1.8 倍となっているが、コイルが移動する場合は要素を再分割する必要がないため、物体を種々移動させて多数回解析を行うときには、全体の解析にかかる時間は短いといえる。もっと詳しく精度について検討するために、FEM の結果を基準として、混合解析法と比較した最大相対誤差、平均相対誤差を Table.5 に示す。最大相対誤差の方は磁束密度値の低いコイル内に発生しており問題はない。また、平均相対誤差は 0.67% と低く十分な精度が得られている。

Table.5 Relative error

最大相対誤差	平均相対誤差
17.6%	0.67%

3.3 渦電流場での検討

次に、Fig.6 に示す渦電流場モデルに混合解析法と FEM を適用し、図の点線の部分の渦電流密度の比較をした。解析に用いた入力データを Table.6 に示す。Fig.6 の点線の部分の渦電流密度分布を Fig.7 に、計算時間を Table.7 に示す。

Table.6 Input data of Eddy current model

手法	混合解析法	FEM
総節点数	1057	1057
FEM 領域の要素数	1899	1995
EFGM 領域の節点数	32	-

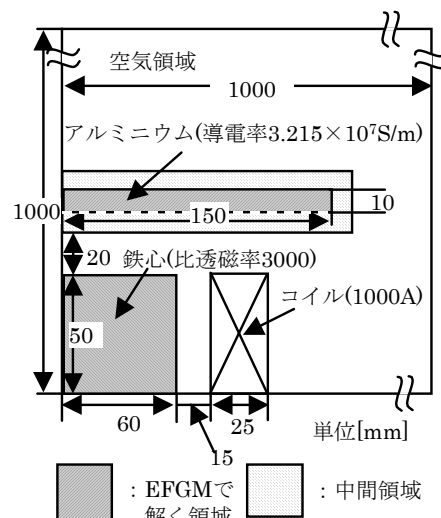


Fig.6 Eddy current model

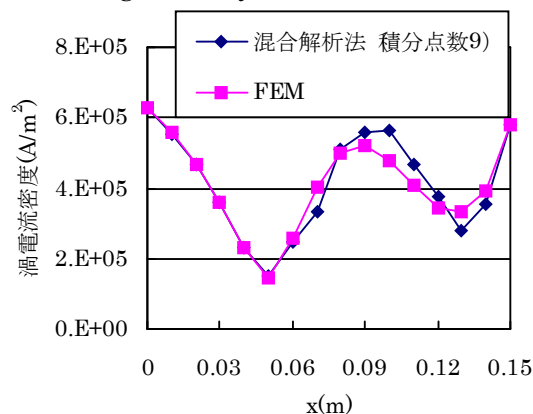


Fig.7 Eddy current density

Table.7 Computation time for Eddy current model

手法	計算時間(sec)
混合解析法	52.0
FEM	3.0

Fig.7 から、混合解析法による結果は、FEM による結果とほとんど差がないことが判る。計算時間は混合解析法の方が多くなっているが、これは渦電流を考慮する導体に積分点を多く配置しているからである。

4 結論

本論文では、解析対象領域内の物体が移動したり、種々の形に物体形状が変化する場合のように、多数回の解析を行う必要があるときに有効な有限要素・エレメントフリーガラキン混合解析法を提案した。本手法を二次元磁場解析に適用し、本提案法の解の精度、計算時間について検討した。その結果、本提案手法により FEM と同程度の解の精度が得られたことが判った。また、渦電流問題への適用が可能なが判った。混合解析法は、

解析対象物体の形状が一定でない場合や、移動物体を含む場合の解析への適用をする場合、要素を再分割せずにすむので、全体の解析にかかる時間はかなり短縮できると言える。また、今後の課題としては、本論文で提案した混合解析法の三次元場への拡張があげられる。

参考文献

- [1]奥田、長嶋、矢川：“エレメントフリーガラーキン法に関する基礎的検討（第2報）”日本機械学会論文集（A編），vol.62, No599, pp.1746-1753, 1996
- [2]Cingoski, Miyamoto, Kaneda, Yamashita, “Erement-free Galerkin Method for Electromagnetic Field Computations” COMPUMAG97, vol1, pp.209-210, Rio de Janeiro, 1997